შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 16

03.05.2014/ მათ/III/ 4366

ამოცანა № 1

გვერდი № 1

ავიღოთ $n=3$, და დავამტკიცოთ, რომ:

$$\frac{a_1^3}{a_1^2+a_2a_3}+\frac{a_2^3}{a_2^2+a_3a_1}+\frac{a_3^3}{a_3^2+a_1a_2}\geq\frac{a_1+a_2+a_3}{2}$$

$$\left(\frac{a_1^3}{a_1^2+a_2a_3}-\frac{a_1}{2}\right)+\left(\frac{a_2^3}{a_2^2+a_3a_1}-\frac{a_2}{2}\right)+\left(\frac{a_3^3}{a_3^2+a_1a_2}-\frac{a_3}{2}\right)\geq 0$$

$$\frac{a_1^3-a_1a_2a_3}{2(a_1^2+a_2a_3)}+\frac{a_2^3-a_1a_2a_3}{2(a_2^2+a_3a_1)}+\frac{a_3^3-a_1a_2a_3}{2(a_3^2+a_1a_2)}\geq 0$$

მოცემული უტოლობა დავშალოთ n ცალ უტოლობად:

$$\frac{a_1^3}{a_1^2+a_2a_3}\geq\frac{a_1}{2}$$

$$\frac{a_2^3}{a_2^3+a_3a_4}\geq\frac{a_2}{2}$$

$$\dots$$

$$\frac{a_k^3}{a_k^3+a_{k+1}a_{k+2}}\geq\frac{a_k}{2}$$

$$\dots$$

$$\frac{a_n^3}{a_n^2+a_1a_2}\geq\frac{a_n}{2}$$

მიღებული უტოლობა ცალ-ცალკე [illegible] და [illegible] ჭეშმარიტი, მაშინ უნდა დავამტკიცოთ, რომ მათი ჯამიც ჭეშმარიტი იქნება.

უკვე მიღებული ჯამიდან [illegible] უტოლობა

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 16

03.05.2014/ მათ/III/ M 366

ამოცანა № 1

გვერდი № 2

[illegible] n ცალი [illegible] რომ გვაძლევდა:

$2a_1^3 \ge a_1^3 + a_1a_2a_3 \quad \Rightarrow \quad a_1^3 \ge a_1a_2a_3$

$a_2^3 \ge a_4a_2a_3$

$\dots$

[illegible] [illegible] [illegible] $\qquad a_k^3 \ge a_ka_{k+1}a_{k+2}$

[illegible] [illegible]

$\dots$

[illegible],

$a_n^3 \ge a_na_1a_2$

მაშინ დავამტკიცეთ, რომ: $\to a_1^3+a_2^3+\dots+a_k^3+\dots+a_n^3 \ge a_1a_2a_3+\dots+a_na_1a_2$

ეს კი n ცალ რიცხვზე დავამტკიცეთ: $a_1 \ge a_2 \ge \dots \ge a_k \ge \dots \ge a_n$

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

$$a_1^3+a_2^3+\dots+a_n^3 \geqslant a_1a_2a_3+a_2a_3a_4+\dots+a_{n-1}a_na_1+a_na_1a_2$$

ეს [illegible] [illegible] $a_1 \leq a_2 \le \dots \le a_k \le \dots \le a_n$

[illegible] [illegible] [illegible].

ანუ [illegible] [illegible].

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

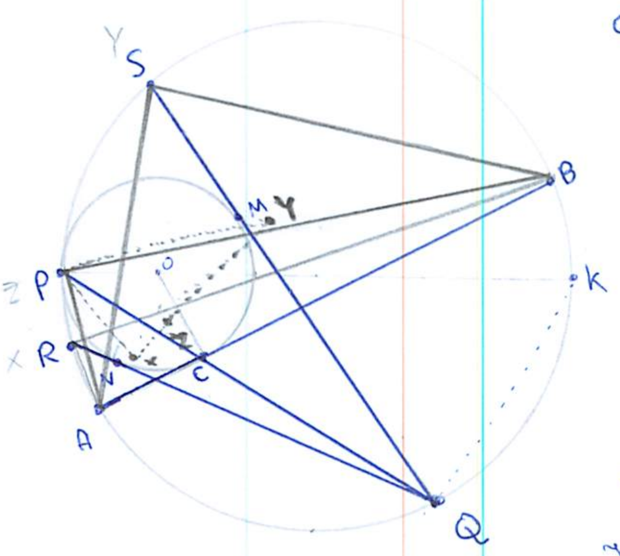
მაგიდა № 16

03.05.2014/ მათ/III/ M366

ამოცანა № 2

გვერდი № 3

ე.ი. $\angle PXZ + \angle PYZ = 90^\circ$



$QM = QN$

$QM^2 = QN^2 = QC \cdot QP$

$QC \cdot PC = AC \cdot BC$

$OC \perp AB$ $OP = OC$

PK დიამეტრია

$\angle PQK = 90^\circ$

$\angle PSQ = \angle PKQ = \frac{\overset{\frown}{AQ}}{2}$

$\angle APZ = \angle BPZ$

თუ X, Y და Z ერთ წრფეზეა,

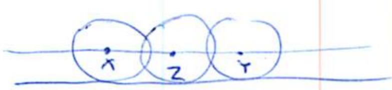
ე.ი. რომ $\angle \cancel{X}PY = 90^\circ$

[illegible]

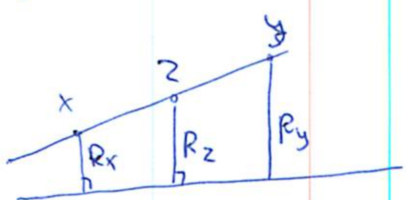
ერთ წრფეზე: თუ XYZ წრფე || AB წრფის, [illegible]

[illegible]

↓ [illegible]



თუ არ [illegible]:



[illegible] $R_x \gtrless R_z > R_y$ ან

$R_y > R_z > R_x$

[illegible]

[illegible]

SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

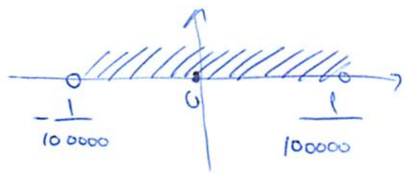
მაგიდა № 16

03.05.2014/ მათ/III/ M366

ამოცანა № 3

გვერდი № 4

$$\left|\frac{a-b}{c-d}-1\right| < \frac{1}{100\,000} \Rightarrow \frac{a-b}{c-d}-1 \in \left(-\frac{1}{100\,000}; \frac{1}{100000}\right)$$



$a>b$ $a\neq c$

$c>d$ $b\neq d$, მაგრამ შესაძლოა $a=d$ ან $b=c$

[illegible], რადგან ამ შემთხვევაში

$d>b$ და $b>d$ $\varnothing$

თუ $a=d$ $c>\overset{d}{a}>b$

თუ $b=c$ $a>\underset{(c)}{b}>d$

$(a-b)$ სხვაობის [illegible] ვარიანტების რაოდენობა $N=1999+1998+\dots+1=$

$=\frac{1999\cdot 2000}{2}=1999\cdot 10^3$

ასევე $(c-d)$-ში.

სულ ვარიანტების რიცხვი N^2, მაგრამ $a=c$ და $b=d$

[illegible], ~~[illegible]~~